d'où : $a = 1$, $b = 2$ et $c = 1+m^2$

(E) s'écrit : $(z - 2i)(z^2 + 2z + 1 + m^2) = 0 \Leftrightarrow z = 2i$ ou $z^2 + 2z + 1 + m^2 = 0$ (*)

$\Delta = 4 - 4(1+m^2) = (2im)^2$ d'où $z' = -1 - im$ et $z'' = -1 + im$

2°/ a) Soit I = A*B et J = M'*M"

$$z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{2i - 2 - 2i}{2} = -1$$

$$z_J = \frac{-1 - im - 1 + im}{2} = -1$$

donc on a : A*B = M'*M" par suite AM'BM" est un parallélogramme

b) AM'BM" est un rectangle si $\vec{AM'}.\vec{AM''} = 0$

on a : $z_{\vec{AM'}} = -1 - im - 2i = -1 - (m+2)i$

$z_{\vec{AM''}} = -1 + im - 2i = -1 + (m-2)i$

on a : $\vec{AM'}\begin{pmatrix} -1 \\ -m-2 \end{pmatrix}$ $\vec{AM''}\begin{pmatrix} -1 \\ m-2 \end{pmatrix}$

d'où : $1+(m-2)(-m-2) = 0 \Leftrightarrow 1 + 4 - m^2 = 0 \Leftrightarrow m = \sqrt{5}$ ou $m = -\sqrt{5}$

Solution 25 :

1°/ M est un point invariant par f $\Leftrightarrow$ f(M) = M $\Leftrightarrow$ z' = z $\Leftrightarrow$

$\frac{z-a}{z-1} = z \Leftrightarrow z^2 - z = z - a \Leftrightarrow z^2 - 2z + a = 0.$

2°/ a) $z^2 - 2z + 1 + e^{2i\theta} = 0 \Leftrightarrow (z-1)^2 = (i\,e^{i\theta})^2$

$\Leftrightarrow z = 1 + i\,e^{i\theta}$ ou $z = 1 - i\,e^{i\theta}$

$S_C = \{1 + i\,e^{i\theta},\ 1 - i\,e^{i\theta}\}$

b) Soit $z' = 1 + i\,e^{i\theta} = 1 - e^{i(\frac{\pi}{2}+\theta)}$ On pose $\alpha = \frac{\pi}{2} + \theta$

On a alors : $z' = 1 + e^{i\alpha} = 2\cos\frac{\alpha}{2}e^{i\frac{\alpha}{2}}$ d'où $z' = 2\cos(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2})}$

On a : $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} < \pi \Rightarrow \cos(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}) < 0$

D'où $z' = -2\cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2})e^{i(\frac{5\pi}{4}+\frac{\theta}{2})}$

C'est la forme trigonométrique de z' :-2cos

Soit $z'' = 1 - i\,e^{i\theta} = 1 + e^{i(\frac{-\pi}{2})}e^{i\theta} = 1 + e^{i\beta}$ où $\beta = \theta - \frac{\pi}{2}$